Смирнов Валерий Сергеевич, группа 320.

Зачёт и экзамен по спецкурсу.

Вопрос 1. Исследовать на скорость сходимости с помощью леммы Брэмбла – Гильберта квадратурную формулу Симпсона.

Решение:

$$L(u) = \int_0^h u(x)dx - \frac{h}{6}\left(u(0) + 4u\left(\frac{h}{2}\right) + u(h)\right) \text{ на } W_2^4(0,h)$$

сделаем замену $x = th$, тогда:

$$L(\hat{u}) = h\int_0^1 \hat{u}(t)dt - \frac{h}{6}\left(\hat{u}(0) + 4\hat{u}\left(\frac{1}{2}\right) + \hat{u}(1)\right)$$

$$\|L(\hat{u})\| \le h\left(\max_{t\in[0,1]}\|\hat{u}(t)\| + \max_{t\in[0,1]}\|\hat{u}(t)\|\right) = 2h\cdot\max_{t\in[0,1]}\|\hat{u}(t)\|$$

$$\max_{t\in[0,1]}\|\hat{u}(t)\| \le \sqrt{2}\cdot\|\hat{u}\|_{W_2^4(0,1)} \Rightarrow \|L(\hat{u})\| \le 2\sqrt{2}h\|\hat{u}\|_{W_2^4(0,1)}$$

$L(u)$ обращается в 0 на любых мн-нах степени не выше 3, $L(u)$ – огр. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ {л. Брэмбла – Гильберта} $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \|L(u)\| \le 2\sqrt{2}\cdot c\cdot h\cdot\|\hat{u}\|_{W_2^4(0,1)} = 2\sqrt{2}\cdot c\cdot h\cdot\left[\int_0^1 [\hat{u}_{tttt}]^2 dt\right]^{1/2} =$$

$$= Mh^{\frac{9}{2}}\cdot\|u\|_{W_2^4(0,h)}$$

$$L(g) = \sum_{k=0}^{n-1}\left[\int_{2k}^{2k+2} g(x)dx - \frac{h'}{6}\left(g(x_{2k}) + 4g(x_{2k+1}) + g(x_{2k+2})\right)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|L(g)\| = \left\|\sum_{k=0}^{n-1} L_k(g)\right\| \le M\cdot(h')^{\frac{9}{2}}\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\|g\|_{W_2^4(x_{2k},x_{2k+2})} \le$$

$$\le M'\cdot(h')^4\cdot\|g\|_{W_2^4(0,1)} \Rightarrow \text{четвертый порядок сходимости}$$

Вопрос 2. Дать определение обобщённой производной и пр-ва Соболева W_p^m.

Ответ:

• Опр. ф-ция $\vartheta(x) \in L_1(\Omega)$ наз. обобщённой производной порядка α в области Ω ф-ции $f(x) \in L_1(\Omega)$, если для $\forall$ ф-ции $\varphi \in D(\Omega)$ выполнено:

$$\int_\Omega \vartheta(x)\varphi(x)dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega f(x)\cdot D^\alpha \varphi(x)dx,$$

тогда $\vartheta(x) = D^\alpha f(x)$.

$L_1(\Omega)$ - мн-во интегрируемых на Ω ф-ций;

$D(\Omega)$ - мн-во беск. дифф. ф-ций, финитных в Ω.

• Пусть мн-во Ω имеет непр. по Липшицу границу, т.е. граница разбив. на конечное число частей, каждая из кот. в нек. СК представляется ур-нием: $x_i = \varphi(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_m)$, где φ - непрерывна по Липшицу.

Для $\forall m \in \mathbb{Z}, m \geq 0$, и $p \in \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq +\infty$, пр-во Соболева $W_p^m(\Omega)$ задаётся как пр-во, состоящее из ф-ций $u \in L_p(\Omega)$, все обобщ. производные кот. ~~таким~~ вида $D^\alpha u(x)$, $|\alpha| \leq m$, принадлежат $L_p(\Omega)$

Норма в соболевском пр-ве $W_p^m(\Omega)$ вводится по следующей формуле:

$$\|u\|_{W_p^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega |D^\alpha u|^p dx\right)^{1/p}$$

Задача 1. $f(x) \in [0,1]$, $f'(x) \in [0, \frac{1}{2}]$, $\forall x \in [0,1]$. $\exists$ решения $f(x)=x$?

Заметим, что отоб. $f(x)$ явл. сжимающим на $[0,1]$:

$\forall x, y \in [0,1]$:

$$|f(x)-f(y)| \overset{\text{ф-ла Лагранжа}}{=} |f'(\xi)| \cdot |x-y|, \quad \xi \in [0,1]$$

т.к. $f'(x) \in [0, \frac{1}{2}] \Rightarrow f'(\xi) \le \frac{1}{2}$, $\xi \in [0,1] \Rightarrow$

$\Rightarrow |f(x)-f(y)| \le \frac{1}{2}|x-y|$

Тогда:

$\exists! \, \xi' \in [0,1]$: $f(\xi') = \xi'$ по т. о принципе сжатых отобр.

$\Rightarrow$ уравнение $f(x)=x$ имеет решение

Задача 2. $M = \{x(t) \in L_2(0,1) \mid x(t)=0$ почти всюду на отр. $[0, \frac{1}{2}]\}$.
Найти ортог. дополнение $M^\perp$.

Покажем, что $Q = \{x(t) \in L_2(0,1) \mid x(t)=0$ почти всюду на отрезке $[\frac{1}{2}; 1]\}$ явл. искомым ортогональным дополнением.

- выберем произвольные $h(t) \in M$ и $y(t) \in Q \Rightarrow$
  $\Rightarrow h(t) \cdot y(t) = 0$ почти всюду на $[0,1]$ по опр. M и Q

т.к. $\int_0^1 h(t) \cdot y(t)\,dt = 0 \Rightarrow M^\perp \supseteq Q$

- выберем произвольный эл-т $y(t) \in M^\perp$;

Δ $x(t) \in M$:

$$x(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ y(t), & t \in (\frac{1}{2}; 1] \end{cases}$$

$(x(t), y(t)) = \int_{\frac{1}{2}}^{1} y^2(t)\,dt \quad (1)$

с др. стороны, т.к. $y(t) \in M^\perp$, а $x(t) \in M$:

$(x(t), y(t)) = 0 \quad (2)$

(1), (2) $\Rightarrow y(t) = 0$ почти всюду на $[\frac{1}{2}, 1] \Rightarrow y(t) \in Q \Rightarrow$

$\Rightarrow M^\perp \subseteq Q \Rightarrow \boxed{M^\perp = Q}$

Задача 3. Является ли компактным оператор $A \in L(C[0,1] \longrightarrow C[0,1])$, если:

а) $Ax(t) = x(0) + tx(1)$;

б) $Ax(t) = t^2 x(t)$?

* Оператор явл. компактным $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ оператор переводит любое огр. мн-во в предкомпактное

* мн-во явл. предкомпактным $\overset{\text{Т. АРЦЕЛА-АСКОЛИ}}{\Longleftrightarrow}$ мн-во явл.:
1) равномерно огр.;
2) равностепенно непр.

Исходя из этого, буд. док-ть компактность / некомпактность операторов.

а) Δ произвольное огр. мн-во $M \subset C[0,1]$

- из огр-сти M: $\exists m : \|x(t)\| \leq m \ \forall x \in M \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \|Ax(t)\| = \sup\limits_{t\in[0,1]} |x(0) + t\cdot x(1)| \leq \sup\limits_{t\in[0,1]} |x(0)| + \sup\limits_{t\in[0,1]} |t\cdot x(1)| =$

$= |x(0)| + |x(1)| \leq m \cdot 2 \quad \forall x \in M \Longrightarrow M$ - равномерно огр.

- $\forall \varepsilon > 0 \ \forall x \in M \ \ \exists \delta > 0$, положим $\delta = \frac{\varepsilon}{m}$:

$|Ax(t+\delta) - Ax(t)| = |(t+\delta)x(1) - t\cdot x(1)| = \delta |x(1)| \leq$

$\leq m \cdot \delta = \varepsilon \Longrightarrow M - \underset{\text{(по определению)}}{\text{равностепенно непр.}} \Longrightarrow$ опер. A явл. компактным

б) $\Delta \ M = \{t^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ - огр. мн-во на $[0,1]$

тогда $A(M) = M^* = \{t^{n+2} \mid n \in \mathbb{N}\}$ - образ оператора A

покажем, что M^* не явл. равностепенно непрерывным:

$\exists \varepsilon_0 = \frac{1}{4} : \forall \delta > 0 \ \exists m \in \mathbb{N} : t_1 = 1, t_2 = 2^{-\frac{1}{m+2}}, |t_1 - t_2| < \delta$, $\exists x(t) = t^m \in M$:

такой m сущ., т.к. $2^{-\frac{1}{m+2}} \xrightarrow[m\to+\infty]{} 2^0 = 1$,

$|Ax(t_1) - Ax(t_2)| = |x(t_1)t_1^2 - x(t_2)t_2^2| = |t_1^{m+2} - t_2^{m+2}| = |1 - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2} > \frac{1}{4} = \varepsilon_0$

$\Longrightarrow$ образ огр. мн-ва M не явл. предкомпактным по Т. Арцела-Асколи $\Longrightarrow$ опер. A не явл. компактным.

Задача 4. $Ax = (x_1, x_2/2, \ldots, x_n/n, \ldots)$. Найти спектр в пр-ве l_2.

* $l_2 = \{x : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\}$ $\|x\|_{l_2} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2\right)^{1/2}$

* $\rho(A) = \{\lambda : \exists$ и непрерывен оператор $R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}\}$ – резольвента оператора A.

* $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ – спектр оператора A.

Очевидно, что $\|Ax\| \leq \|x\|$ $\forall x \in l_2$, т.к. $\|Ax\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x_n}{n}\right)^2\right)^{1/2} \leq$
$\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2\right)^{1/2} = \|x\| \Longrightarrow A$ – огр. опер.

$\vartriangle$ $B = A - \lambda I$, $Bx = \left(\frac{1-\lambda\cdot 1}{1}x_1, \frac{1-\lambda\cdot 2}{2}x_2, \ldots, \frac{1-\lambda n}{n}x_n, \ldots\right)$

1) $\lambda = \frac{1}{n} \Longrightarrow$ оператор B необратим $\Longrightarrow \lambda \notin \rho(A) \Longrightarrow \lambda \in \sigma(A)$

2) $\lambda \neq \frac{1}{n} \Longrightarrow$ оператор C, обратный к B:
$C = B^{-1} = (A - \lambda I)^{-1}$ $Cx = \left(\frac{1}{1-\lambda\cdot 1}x_1, \ldots, \frac{n}{1-\lambda n}x_n, \ldots\right)$

- $\lambda = 0$ $Cx = (1\cdot x_1, 2\cdot x_2, \ldots, n\cdot x_n, \ldots)$ – очев. неогр. $\Longrightarrow$
$\Longrightarrow \lambda \notin \rho(A) \Longrightarrow \lambda \in \sigma(A)$

- $\lambda \neq 0$ $\|Cx\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n x_n}{1-\lambda n}\right)^2\right)^{1/2}$

т.к. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n x_n}{1-\lambda n}\right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2 x_n^2}{n^2\left(\frac{1}{n}-\lambda\right)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n^2}{\left(\frac{1}{n}-\lambda\right)^2} \leq \frac{1}{\inf\limits_{k\in\mathbb{N}}\left(\frac{1}{k}-\lambda\right)^2}\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 =$
$= \left\{\text{при фиксированном } \lambda \neq 0, \frac{1}{k} \quad \frac{1}{\inf\limits_{k\in\mathbb{N}}\left(\frac{1}{k}-\lambda\right)^2} - \text{константа } C_0 > 0\right\} =$
$= C_0 \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 = C_0 \|x\|^2 \Longrightarrow \|Cx\| \leq \sqrt{C_0}\cdot\|x\| \Longrightarrow C$ – огр. опер.
$\Longrightarrow \lambda \in \rho(A) \Longrightarrow \lambda \notin \sigma(A)$

$\boxed{\text{Ответ: } \sigma(A) = \{0\} \cup \left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}.}$